

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

On cherche à construire de manière systématique des transformations qui conservent la forme de ces équations.

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

On cherche à construire de manière systématique des transformations qui conservent la forme de ces équations.

But: trouver de telles transformations qui simplifient la forme du Hamiltonien et des équations du mouvement

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

On cherche à construire de manière systématique des transformations qui conservent la forme de ces équations.

But: trouver de telles transformations qui simplifient la forme du Hamiltonien et des équations du mouvement

Comment: combiner le principe de moindre action

$$\delta S = 0 \quad S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

On cherche à construire de manière systématique des transformations qui conservent la forme de ces équations.

But: trouver de telles transformations qui simplifient la forme du Hamiltonien et des équations du mouvement

Comment: combiner le principe de moindre action

$$\delta S = 0 \quad S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$

avec l'invariance de jauge, i.e. dynamique invariante sous

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + dF/dt$$

Les transformations canoniques

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle $q \leftrightarrow p$

On cherche à construire de manière systématique des transformations qui conservent la forme de ces équations.

But: trouver de telles transformations qui simplifient la forme du Hamiltonien et des équations du mouvement

Comment: combiner le principe de moindre action

$$\delta S = 0 \quad S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$

avec l'invariance de jauge, i.e. dynamique invariante sous

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + dF/dt$$

Les transformations canoniques

On considère donc des transformations de coordonnées

$$\begin{array}{ccc} (p_i, q_i) & \rightarrow & (P_i, Q_i) \\ H(p_i, q_i; t) & \rightarrow & K(P_i, Q_i; t) \end{array}$$

telles qu'ancien et nouvel Hamiltonien satisfont au principe de moindre action,

$$\delta S = 0$$

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$
$$S[\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right\} dt$$

Les transformations canoniques

On considère donc des transformations de coordonnées

$$\begin{array}{ccc} (p_i, q_i) & \rightarrow & (P_i, Q_i) \\ H(p_i, q_i; t) & \rightarrow & K(P_i, Q_i; t) \end{array}$$

telles qu'ancien et nouvel Hamiltonien satisfont au principe de moindre action,

$$\delta S = 0$$

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$
$$S[\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right\} dt$$


Invariance de jauge : δS ne change pas si on ajoute $dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$

Les transformations canoniques

On considère donc des transformations de coordonnées

$$\begin{array}{ccc} (p_i, q_i) & \rightarrow & (P_i, Q_i) \\ H(p_i, q_i; t) & \rightarrow & K(P_i, Q_i; t) \end{array}$$

telles qu'ancien et nouvel Hamiltonien satisfont au principe de moindre action,

$$\delta S = 0$$

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$
$$S[\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right\} dt$$


Invariance de jauge : δS ne change pas si on ajoute $dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

Propriétés générales :

1) $P_i = P_i(p_i, q_i; t)$

$Q_i = Q_i(p_i, q_i; t)$

-> $4n+1$ coordonnées et $2n$ équations

-> seulement $2n+1$ coordonnées indépendantes

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

Propriétés générales :

1) $P_i = P_i(p_i, q_i; t)$

$Q_i = Q_i(p_i, q_i; t)$

-> $4n+1$ coordonnées et $2n$ équations

-> seulement $2n+1$ coordonnées indépendantes

2) $F(p_i, q_i; t)$ et $F(P_i, Q_i; t)$ ne génèrent pas de transformation -
Invariance de jauge seulement dans un système de coordonnées

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$

$$S[\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right\} dt$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

Propriétés générales :

1) $P_i = P_i(p_i, q_i; t)$

$Q_i = Q_i(p_i, q_i; t)$

-> $4n+1$ coordonnées et $2n$ équations

-> seulement $2n+1$ coordonnées indépendantes

2) $F(p_i, q_i; t)$ et $F(P_i, Q_i; t)$ ne génèrent pas de transformation -
Invariance de jauge seulement dans un système de coordonnées

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt$$

$$S[\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right\} dt$$

-> mélanger les systèmes de coordonnées dans F

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = *fonction génératrice*

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4(p_i, P_i, t)$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = *fonction génératrice*

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \cancel{\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \cancel{\frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Exemple: pour F_1

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \cancel{\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \cancel{\frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Exemple: pour F_1

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt$$

Les autres $F_{2,3,4}$ sont obtenues par transformation de Legendre - ex. F_2

$$(q_i, Q_i) \rightarrow (q_i, P_i) \quad -P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad F_2(q_i, P_i) = F_1(q_i, Q_i) + \sum_i P_i Q_i$$

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + d(F_2 - \sum_i P_i Q_i)/dt \\ &= - \sum_i Q_i \dot{P}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF_2/dt \end{aligned}$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = *fonction génératrice*

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}$$

$$F_2(q_i, P_i, t)$$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}$$

$$F_3(p_i, Q_i, t)$$

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned}$$

$$F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}$$

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = fonction génératrice

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$F_2(q_i, P_i, t)$$

$$F_3(p_i, Q_i, t)$$

$$F_4(p_i, P_i, t)$$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

→ déterminent le changement de coordonnées

Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = *fonction génératrice*

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$F_2(q_i, P_i, t)$$

$$F_3(p_i, Q_i, t)$$

$$F_4(p_i, P_i, t)$$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

→ déterminent la transformation du Hamiltonien

Structure symplectique

Transformation canonique, notation compacte

$$\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$$

$$\vec{y} = (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N)$$

Structure symplectique

Transformation canonique, notation compacte

$$\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$$

$$\vec{y} = (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N)$$

Matrice Jacobienne de la transformation

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (M^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Structure symplectique

Transformation canonique, notation compacte

$$\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$$

$$\vec{y} = (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N)$$

Matrice Jacobienne de la transformation

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (M^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Structure symplectique conservée par la transformation

$${}^t M J M = J \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Structure symplectique

Transformation canonique, notation compacte

$$\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$$

$$\vec{y} = (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N)$$

Matrice Jacobienne de la transformation

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (M^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Structure symplectique conservée par la transformation

$${}^t M J M = J \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Raison :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{aligned} \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$